Ce document a été mis en ligne par l'organisme FormaV®.

Toute reproduction, représentation ou diffusion, même partielle, sans autorisation préalable, est strictement interdite.

Pour en savoir plus sur nos formations disponibles, veuillez visiter :
formav.co/explorer

BTS Coiffure

# Mathématiques

**Session 2022** • Code sujet : **22MATGRB1** • Durée : **2 heures** • Coefficient : **2 pour toutes les spécialités sauf Traitement des matériaux : 3**

## Sommaire

Cliquez sur une partie pour y accéder directement


1. **Freinage d'un chariot de fête foraine** (12 questions) — **Page 3**
2. **Contrôle de conformité et durée de vie des tubes fluorescents** (9 questions) — **Page 7**
3. **Ce qu'il faut retenir & Questions fréquentes (FAQ)** (Synthèse & Q&A Examen) — **Page 11**


**Sujet officiel (PDF) :** https://btscoiffure.fr/assets/annales/bts-coiffure/E2 - Mathématiques/2022/BTS Coiffure - E2 - Mathématiques - Session 2022 - 1-Sujet.pdf

# 1. Freinage d'un chariot de fête foraine

Un chariot se déplace initialement à 20 m/s sur un axe horizontal, puis ralentit sous l'effet d'un système de freinage. Sa vitesse est modélisée par une fonction définie à l'aide d'une équation différentielle, puis étudiée par analyse, intégration et développement limité.

## Partie A - Résolution d'une équation différentielle

**Question 1. a. Résoudre l'équation différentielle homogène ($E_0$) : y' + 0,8y = 0.**

La formule fournie s'applique à l'équation homogène $y' + ay = 0$. Avec $a = 0,8$, on obtient les solutions $y(t) = Ce^{-0,8t}$, où $C$ est une constante réelle.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $y(t) = Ce^{-0,8t}$, avec $C \in \mathbb{R}$.

**Question 1. b. La fonction g est définie par g(t) = 5. Vérifier que g est solution de l'équation différentielle (E) : y' + 0,8y = 4.**

> La fonction $g(t) = 5$ est constante, donc $g'(t) = 0$. En remplaçant dans le membre de gauche : $g'(t) + 0,8g(t) = 0 + 0,8 \times 5 = 4$. Elle vérifie bien l'équation différentielle $(E)$.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $g(t) = 5$ est solution de $(E)$.

**Question 1. c. Déduire de la question précédente l'ensemble des solutions de l'équation différentielle (E) : y' + 0,8y = 4.**

La fonction constante $g(t) = 5$ est une solution particulière de $(E)$. Toute autre solution s'obtient en lui ajoutant une solution de l'équation homogène $(E_0)$, soit $Ce^{-0,8t}$, où $C$ est réel.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $y(t) = 5 + Ce^{-0,8t}$, avec $C \in \mathbb{R}$.

**Question 2. Déterminer la solution f de l'équation différentielle (E) qui vérifie la condition initiale f(0) = 20.**

1. La solution générale s'écrit $f(t) = 5 + Ce^{-0,8t}$.
2. La condition initiale donne $f(0) = 5 + C = 20$, car $e^0 = 1$. Ainsi, $C = 15$.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$f(t) = 15e^{-0,8t} + 5$.

## Partie B - Étude de la fonction f

**Question 1. a. Démontrer que la limite de f(t) lorsque t tend vers +∞ est égale à 5.**

On a $f(t) = 15e^{-0,8t} + 5$. Lorsque $t \to +\infty$, l'exponentielle $e^{-0,8t}$ tend vers 0. Le terme exponentiel tend donc vers 0, tandis que le terme constant reste égal à 5. Ainsi, $f(t)$ tend vers 5.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$\lim\limits_{t \to +\infty} f(t) = 5$.

**Question 1. b. En déduire que la courbe C admet une asymptote et donner une équation de celle-ci.**

> La limite de $f(t)$ lorsque $t \to +\infty$ est finie et vaut 5. La courbe $C$ admet donc une asymptote horizontale en $+\infty$, d'équation $y = 5$.

✓ RÉPONSE À RETENIR

Asymptote horizontale : $y = 5$.

**Question 2. À partir de l'expression fournie de f'(t), dresser le tableau de variation de f sur [0 ; +∞[.**

Comme $e^{-0,8t} > 0$ sur l'intervalle, $f'(t) = -12e^{-0,8t} < 0$. La fonction est strictement décroissante. De plus, $f(0) = 20$ et sa limite en $+\infty$ vaut 5.

| $t$ | **0** | $+\infty$ |
|---|---|---|
| $f'(t)$ | – | |
| $f(t)$ | 20 | ↘ 5 |

✓ RÉPONSE À RETENIR

$f$ décroît de 20 vers 5 sur $[0; +\infty[$.

**Question 3. Déterminer si le système de freinage permet au chariot de s'arrêter.**

Pour tout $t \geq 0$, $e^{-0,8t} > 0$, donc $f(t) = 15e^{-0,8t} + 5 > 5$. La vitesse se rapproche de 5 m/s sans jamais atteindre zéro.

✓ RÉPONSE À RETENIR

Non, le chariot ne s'arrête pas : sa vitesse tend vers 5 m/s.

**Question 4. a. Vérifier que la fonction F définie par F(t) = -18,75e^(-0,8t) + 5t est une primitive de f sur [0 ; +∞[.**

En dérivant $F(t) = -18,75e^{-0,8t} + 5t$, on obtient $F'(t) = 18,75 \times 0,8e^{-0,8t} + 5$. Comme $18,75 \times 0,8 = 15$, alors $F'(t) = 15e^{-0,8t} + 5 = f(t)$. Ainsi, $F$ est une primitive de $f$.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$F'(t) = f(t)$ : $F$ est une primitive de $f$.

**Question 4. b. En utilisant la formule intégrale donnée, calculer la valeur exacte de la distance parcourue par le chariot entre $t_0 = 0$ et $t_1 = 1$, puis donner une valeur arrondie au centimètre.**

La distance parcourue est $d = \int_0^1 f(t)\,dt = F(1) - F(0)$. Donc $d = (-18,75e^{-0,8} + 5) - (-18,75) = 23,75 - 18,75e^{-0,8}$ mètres. Cette valeur est environ $15,3251$ mètres.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$d = 23,75 - 18,75e^{-0,8} \approx 15,33$ m.

## Partie C - Étude locale

**Question 1. Question à choix multiples : choisir l'unique expression correcte du développement limité de f à l'ordre 2 au voisinage de zéro et la recopier sans justification. Une réponse fausse, multiple ou absente ne rapporte ni n'enlève de point.**

$f(t) = 20 - 12t + \frac{24}{5}t^2 + t^2\varepsilon(t)$, avec $\lim_{t\to 0} \varepsilon(t) = 0$.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$f(t) = 20 - 12t + \frac{24}{5}t^2 + t^2\varepsilon(t)$, avec $\varepsilon(t) \to 0$.

**Question 2. Donner une équation de la tangente T à la courbe C au point d'abscisse 0.**

La tangente en l'abscisse 0 a pour équation $y = f(0) + f'(0)t$. Or $f(0) = 20$ et $f'(0) = -12e^0 = -12$. En remplaçant ces valeurs, on obtient l'équation de la tangente.

✓ **RÉPONSE À RETENIR**

$T : y = 20 - 12t$.

## 2. Contrôle de conformité et durée de vie des tubes fluorescents

Une usine produit des tubes fluorescents dans deux ateliers, avec des proportions de production et des taux de défaut différents. L'exercice étudie aussi la durée de fonctionnement selon une loi exponentielle et estime la proportion de rivets conformes à partir d'un échantillon.

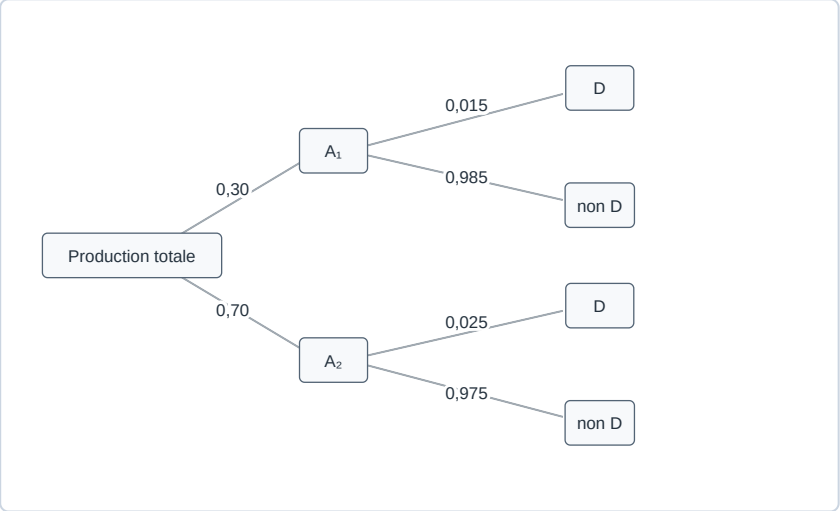
### Partie A - Probabilités conditionnelles

**Question 1. Réaliser un arbre pondéré décrivant la production des deux ateliers et les probabilités de défaut correspondantes.**

Le premier embranchement répartit la production entre les deux ateliers : 30 % pour l'atelier 1 et 70 % pour l'atelier 2. À partir de chaque atelier, on sépare les tubes défectueux des tubes sans défaut selon les taux indiqués dans l'énoncé.

1. Atelier 1 : défaut 0,015 ; absence de défaut 0,985.
2. Atelier 2 : défaut 0,025 ; absence de défaut 0,975.

**Arbre pondéré de la production**




Les probabilités des branches issues d'un même nœud totalisent 1.

**✓ RÉPONSE À RETENIR**

Arbre pondéré : proportions 0,30 et 0,70 ; taux de défaut conditionnels 0,015 et 0,025, respectivement.

**Question 2. Calculer la probabilité P(A₁ ∩ D), où A₁ désigne l'événement « le tube provient de l'atelier 1 » et D l'événement « le tube présente un défaut ».**

Pour obtenir la probabilité que le tube provienne de l'atelier 1 et soit défectueux, on multiplie la probabilité de provenir de cet atelier par la probabilité conditionnelle d'un défaut dans cet atelier. Ainsi, $P(A_1 \cap D) = P(A_1)P(D \mid A_1) = 0{,}30 \times 0{,}015 = 0{,}0045$. La probabilité conjointe correspond au chemin atelier 1 puis défaut dans l'arbre.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$P(A_1 \cap D) = 0{,}0045$, soit $0{,}45\ \%$ de la production totale.

---

**Question 3. Calculer P(D) à partir des données de l'énoncé. La valeur imprimée dans la consigne semble corrigée à la main sur l'image.**

Un tube défectueux peut provenir de l'un ou l'autre atelier. On additionne donc les probabilités des deux chemins menant à l'événement $D$, en utilisant les proportions de production et les taux conditionnels donnés dans l'énoncé :

$$P(D) = 0{,}30 \times 0{,}015 + 0{,}70 \times 0{,}025 = 0{,}022.$$

La valeur corrigée à la main sur le sujet est bien $0{,}022$.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$P(D) = 0{,}022$, soit $2{,}2\ \%$.

---

**Question 4. Sachant que le tube ne présente pas de défaut, déterminer la probabilité qu'il provienne de l'atelier 2.**

On cherche une probabilité conditionnelle parmi les tubes sans défaut. Le numérateur est la probabilité qu'un tube provienne de l'atelier 2 et soit sans défaut : $0{,}70 \times 0{,}975 = 0{,}6825$. La probabilité d'être sans défaut vaut $1 - 0{,}022 = 0{,}978$.

1. $P(A_2 \cap \overline{D}) = 0{,}6825$.
2. $P(A_2 \mid \overline{D}) = 0{,}6825 / 0{,}978 \approx 0{,}698$.

✓ RÉPONSE À RETENIR

Parmi les tubes sans défaut, environ $69{,}8\ \%$ proviennent de l'atelier 2.

---

## Partie B - Durée de vie des tubes fluorescents

**Question 1. Déterminer l'espérance E(T) de la durée de bon fonctionnement d'un tube, puis interpréter le résultat dans le contexte.**

La durée de bon fonctionnement $T$ suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda = 0{,}001$. D'après la formule donnée dans l'énoncé, son espérance est l'inverse du paramètre :

$$E(T) = \frac{1}{\lambda} = \frac{1}{0{,}001} = 1\,000.$$

Cette valeur représente la durée moyenne de bon fonctionnement des tubes lorsqu'on considère une grande quantité de tubes.

✓ RÉPONSE À RETENIR

La durée moyenne de bon fonctionnement est de $1\,000$ heures.

---

**Question 2. Calculer, au centième près, la probabilité que la durée de bon fonctionnement d'un tube prélevé soit inférieure à 8 000 heures.**

La formule de la loi exponentielle donne $P(T \leq t) = 1 - e^{-\lambda t}$. La durée étant une variable continue, $P(T < 8\,000) = P(T \leq 8\,000)$. Avec $\lambda = 0{,}001$, on obtient $1 - e^{-0{,}001 \times 8\,000} \approx 0{,}9996645$, puis on arrondit cette probabilité au centième.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$P(T < 8\,000) \approx 1{,}00$, soit 100 % au centième près.

---

**Question 3. Calculer, au centième près, la probabilité que la durée de bon fonctionnement d'un tube prélevé soit supérieure à 10 000 heures.**

Pour une loi exponentielle, la probabilité de dépasser une durée $t$ est le complément de la fonction de répartition : $P(T > t) = e^{-\lambda t}$. Pour $t = 10\,000$ heures et $\lambda = 0{,}001$, cela donne $e^{-0{,}001 \times 10\,000} = e^{-10} \approx 0{,}0000454$. L'arrondi demandé est au centième.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$P(T > 10\,000) \approx 0{,}00$ au centième près.

---

## Partie C - Intervalle de confiance

**Question 1. À partir des 975 rivets conformes observés sur un échantillon de 1 000 rivets, donner une estimation ponctuelle de la proportion inconnue p de rivets conformes dans la production.**

L'estimation ponctuelle de la proportion inconnue $p$ est la fréquence des rivets conformes observée dans l'échantillon. Sur les 1 000 rivets prélevés, 975 sont conformes. On calcule donc $\hat{p} = 975/1\,000 = 0{,}975$, ce qui correspond à une fréquence observée de $97{,}5\ \%$.

✓ RÉPONSE À RETENIR

Estimation ponctuelle : $\hat{p} = 0{,}975$, soit $97{,}5\ \%$.

**Question 2. À l'aide de la formule fournie, déterminer un intervalle de confiance centré sur la fréquence observée pour la proportion p, au niveau de confiance de 95 %. Arrondir les bornes au millième.**

La formule de l'énoncé utilise la fréquence observée $f = 0{,}975$ et la taille d'échantillon $n = 1\,000$. La marge vaut $1{,}96\sqrt{0{,}975(1-0{,}975)/1\,000} \approx 0{,}009677$. On soustrait puis on ajoute cette marge à $f$, avant d'arrondir chaque borne au millième :

$$[0{,}975 - 0{,}009677\ ;\ 0{,}975 + 0{,}009677].$$

**✓ RÉPONSE À RETENIR**

Intervalle de confiance à 95 % : $[0{,}965\ ;\ 0{,}985]$.

# Ce qu'il faut retenir de ce sujet (Session 2022)

**Bilan de l'épreuve :** Épreuve de mathématiques du BTS, Groupement B, session 2022, code 22MATGRB1, durée 2 heures. Le coefficient est 2, sauf en Traitement des matériaux où il est 3. Deux exercices de 10 points étudient le freinage d'un chariot et la conformité de tubes et rivets. Les compétences évaluées portent sur les équations différentielles, l'analyse, les intégrales, les probabilités, la loi exponentielle et l'estimation statistique.

### Notions-clés, formules & règles à maîtriser

- Pour y' + ay = 0, les solutions sont y(t) = ke^(-at) ; une solution particulière complète l'ensemble des solutions de l'équation avec second membre.
- Si f(t) tend vers une limite L lorsque t tend vers +∞, la courbe de f admet l'asymptote horizontale d'équation y = L.
- Pour une loi exponentielle de paramètre λ, E(T) = 1/λ et P(T ≤ t) = 1 - e^(-λt).
- Pour une proportion, l'estimation ponctuelle est la fréquence observée ; l'intervalle à 95 % utilise f ± 1,96√(f(1-f)/n).

### Points de vigilance & attentes du jury

- Après avoir trouvé la solution générale de l'équation différentielle, appliquer explicitement la condition initiale f(0) = 20.
- Pour conclure sur l'arrêt, distinguer une vitesse qui tend vers une valeur de zéro et une vitesse qui s'annule à un instant fini.
- Dans l'arbre pondéré, associer les proportions de production aux ateliers et les taux conditionnels de défaut aux branches correspondantes.
- Pour l'intervalle de confiance, utiliser n = 1 000 et f = 975/1 000, puis arrondir les bornes au millième.

## Questions fréquentes sur cette épreuve (Q&A Examen)

**Q : Comment résoudre l'équation différentielle du chariot ?**

Résolvez d'abord l'équation homogène y' + 0,8y = 0. Ajoutez ensuite la solution particulière constante indiquée, puis appliquez f(0) = 20 pour déterminer la constante et obtenir la vitesse recherchée.

**Q : Comment calculer la probabilité conditionnelle dans l'exercice des ateliers ?**

La probabilité d'une intersection se calcule en multipliant les probabilités le long de la branche correspondante. Pour une probabilité conditionnelle, divisez l'intersection par la probabilité de l'événement connu.

**Q : Comment organiser les deux heures d'épreuve ?**

L'épreuve comporte deux exercices de 10 points, chacun avec des parties indépendantes. Répartissez le temps entre les deux exercices, écrivez les étapes utiles des calculs et gardez quelques minutes pour vérifier unités, résultats et arrondis.

**Q : Quels arrondis et consignes particulières respecter ?**

La distance est à arrondir au centimètre, les probabilités de durée de vie au centième et les bornes de l'intervalle de confiance au millième. Pour le QCM du développement limité, une seule réponse est attendue, sans justification.

**Sujet officiel associé (PDF) :** https://btscoiffure.fr/assets/annales/bts-coiffure/E2 - Mathématiques/2022/BTS Coiffure - E2 - Mathématiques - Session 2022 - 1-Sujet.pdf
**Ressources BTS Coiffure :** Toutes les annales & corrigés • Fiches de révision complètes • Simulateur de notes d'examen

Copyright © 2027 FormaV®. Tous droits réservés.

FormaV® est une marque déposée auprès de l'INPI sous le numéro 5227897.

Ce document a été élaboré par FormaV® avec le plus grand soin afin d'accompagner chaque apprenant vers la réussite de ses examens. Son contenu (textes, graphiques, méthodologies, tableaux, exercices, concepts, mises en forme) constitue une œuvre protégée par le droit d'auteur.

Toute copie, partage, reproduction, diffusion ou mise à disposition, même partielle, gratuite ou payante, est strictement interdite sans accord préalable et écrit de FormaV®, conformément aux articles L.111-1 et suivants du Code de la propriété intellectuelle. Dans une logique anti-plagiat, FormaV® se réserve le droit de vérifier toute utilisation illicite, y compris sur les plateformes en ligne ou sites tiers.

En utilisant ce document, vous vous engagez à respecter ces règles et à préserver l'intégrité du travail fourni. La consultation de ce document est strictement personnelle.

Merci de respecter le travail accompli afin de permettre la création continue de ressources pédagogiques fiables et accessibles.