Ce document a été mis en ligne par l'organisme FormaV®.

Toute reproduction, représentation ou diffusion, même partielle, sans autorisation préalable, est strictement interdite.

Pour en savoir plus sur nos formations disponibles, veuillez visiter :
formav.co/explorer

BTS Coiffure

Mathématiques

Session 2022 • Code sujet : **22MATGRB2** • Durée : **2 heures** • Coefficient : **1,5 pour Conception et industrialisation en microtechniques ; 2 pour Électrotechnique**

Sommaire

Cliquez sur une partie pour y accéder directement

1. **Modélisation et étude de la vitesse d'un chariot pendant le freinage** (12 questions) — **Page 3**

2. **Transformées de Laplace d'un système électrique entrée-sortie** (9 questions) — **Page 6**

3. **Ce qu'il faut retenir & Questions fréquentes (FAQ)** (Synthèse & Q&A Examen) — **Page 10**

Sujet officiel (PDF) : https://btscoiffure.fr/assets/annales/bts-coiffure/E2 - Mathématiques/2022/BTS Coiffure - E2 - Mathématiques - Session 2022 - 2-Sujet.pdf

1. Modélisation et étude de la vitesse d'un chariot pendant le freinage

Un chariot de fête foraine se déplace à 20 m·s⁻¹ avant d'être ralenti par un système de freinage. Sa vitesse est modélisée par une équation différentielle, puis étudiée à l'aide de limites, de variations, d'une intégrale et d'un développement limité.

Partie A - Résolution d'une équation différentielle

Question 1.a. Résoudre sur l'intervalle indiqué l'équation différentielle homogène y' + 0,8y = 0, en utilisant la formule fournie.

La formule donnée conduit à $y(t) = ke^{-at}$. Avec $a = 0,8$, les solutions sur $[0; +\infty[$ sont $y(t) = ke^{-0,8t}$, où k est une constante réelle.

> ✓ RÉPONSE À RETENIR
>
> $y(t) = ke^{-0,8t}, \quad k \in \mathbb{R}.$

Question 1.b. Vérifier que la fonction g définie par g(t) = 5 est solution de l'équation différentielle y' + 0,8y = 4.

Comme $g(t) = 5$, on a $g'(t) = 0$. Alors $g'(t) + 0,8g(t) = 0 + 0,8 \times 5 = 4$. La fonction g vérifie donc l'équation différentielle.

> ✓ RÉPONSE À RETENIR
>
> $g(t) = 5$ est solution de $y' + 0,8y = 4$.

Question 1.c. En déduire l'ensemble des solutions de l'équation différentielle y' + 0,8y = 4.

Les solutions de l'équation complète s'obtiennent en ajoutant une solution particulière, 5, aux solutions de l'équation homogène associée. Elles sont donc de la forme $y(t) = 5 + ke^{-0,8t}$, avec k réel.

> ✓ RÉPONSE À RETENIR
>
> $y(t) = 5 + ke^{-0,8t}, \quad k \in \mathbb{R}.$

Question 2. Déterminer la solution f de l'équation différentielle qui vérifie la condition initiale f(0) = 20.

Dans la solution générale, la condition $f(0) = 20$ donne $5 + k = 20$, donc $k = 15$. Ainsi, la solution cherchée est $f(t) = 15e^{-0,8t} + 5$.

> ✓ RÉPONSE À RETENIR
>
> $f(t) = 15e^{-0,8t} + 5.$

Partie B - Étude de la fonction f

Question 1.a. Démontrer que la limite de f(t) lorsque t tend vers +∞ est égale à 5.

Lorsque $t \to +\infty$, $-0,8t \to -\infty$, donc $e^{-0,8t} \to 0$. Par conséquent, dans $f(t) = 15e^{-0,8t} + 5$, le terme exponentiel tend vers zéro et il reste 5.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $\lim\limits_{t \to +\infty} f(t) = 5$.

Question 1.b. Déduire de cette limite que la courbe C admet une asymptote et en donner une équation.

Comme $f(t)$ tend vers 5 lorsque $t \to +\infty$, la courbe C admet une asymptote horizontale à droite d'équation $y = 5$.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> Asymptote horizontale : $y = 5$.

Question 2. À partir de l'expression donnée de f'(t), dresser le tableau de variation de f sur [0 ; +∞[.

Pour tout $t \geq 0$, l'exponentielle est positive, donc $f'(t) = -12e^{-0,8t} < 0$. La fonction est strictement décroissante, de $f(0) = 20$ vers sa limite 5.

t	0		$+\infty$
$f'(t)$		$-$	
$f(t)$	20	$\searrow$	5

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> f décroît strictement de 20 vers 5.

Question 3. Déterminer si le système de freinage permet au chariot de s'arrêter.

La vitesse est strictement décroissante et tend vers $5\ \mathrm{m\cdotp s^{-1}}$. Elle reste donc supérieure à $5\ \mathrm{m\cdotp s^{-1}}$ à tout instant fini et n'atteint jamais zéro.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> Non, le chariot ne s'arrête pas : sa vitesse tend vers $5\ \mathrm{m\cdotp s^{-1}}$.

Question 4.a. **Vérifier que la fonction F donnée est une primitive de f sur [0 ; +∞[.**

En dérivant $F(t) = -18,75e^{-0,8t} + 5t$, on obtient $F'(t) = (-18,75)(-0,8)e^{-0,8t} + 5 = 15e^{-0,8t} + 5 = f(t)$. Ainsi, F est une primitive de f.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $F'(t) = f(t) = 15e^{-0,8t} + 5$: F est une primitive de f.

Question 4.b. **À l'aide de l'intégrale de la vitesse, calculer la distance exacte parcourue par le chariot entre $t_0 = 0$ et $t_1 = 1$, puis donner une valeur arrondie au centimètre.**

La distance vaut $F(1) - F(0)$. En remplaçant les bornes, $d = (-18,75e^{-0,8} + 5) - (-18,75) = 23,75 - 18,75e^{-0,8}$ mètres. L'arrondi au centimètre est $15,33$ mètres.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $d = 23,75 - 18,75e^{-0,8} \approx 15,33\ \text{m}$.

Partie C - Étude locale

Question 1. **Choisir la seule proposition exacte donnant le développement limité de f à l'ordre 2 au voisinage de zéro. Recopier la réponse choisie sans justification.**

La partie régulière affichée est $20 - 12t + \frac{24}{5}t^2$. Pour un développement limité à l'ordre 2, le reste s'écrit $t^2\varepsilon(t)$, avec $\varepsilon(t) \to 0$. Il s'agit de la troisième proposition.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> Troisième proposition : $20 - 12t + 4,8t^2 + t^2\varepsilon(t)$, avec $\lim_{t\to 0} \varepsilon(t) = 0$.

Question 2. **Donner une équation de la tangente T à la courbe C au point d'abscisse 0.**

Le point de tangence est $(0; 20)$ puisque $f(0) = 20$, et la pente vaut $f'(0) = -12$. L'équation de la tangente est donc $y = 20 - 12t$.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> T : $y = 20 - 12t$.

2. Transformées de Laplace d’un système électrique entrée-sortie

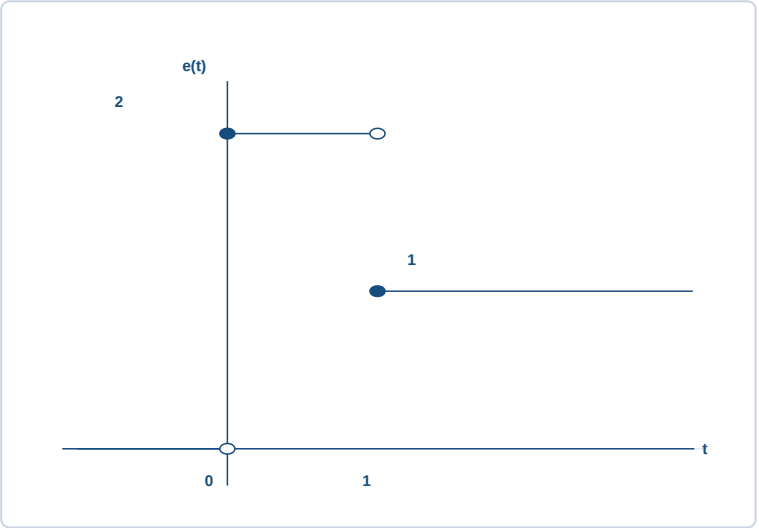
Un système électrique causal reçoit le signal e(t) = 2U(t) - U(t - 1) et possède pour fonction de transfert H(p) = 1/(p + 1). L’exercice porte sur le tracé du signal d’entrée, les transformées de Laplace et leurs inverses afin de déterminer et représenter le signal de sortie.

Partie A - Signal d’entrée

Question 1. Sur le document-réponse à rendre avec la copie, tracer la courbe représentative de la fonction e(t).

Par définition, le signal est causal : il vaut 0 avant l’instant 0. Pour t ≥ 0, le terme 2U(t) vaut 2. À partir de t = 1, le terme U(t − 1) vaut 1 et le signal passe donc à 1. Il faut marquer les valeurs prises aux instants de saut : e(0) = 2 et e(1) = 1. Les cercles ouverts indiquent les valeurs non prises.

Signal d’entrée e(t)



✓ RÉPONSE À RETENIR

Palier 0 pour t < 0, palier 2 pour 0 ≤ t < 1, puis palier 1 pour t ≥ 1.

Question 2. Déterminer la transformée de Laplace E(p) du signal d’entrée.

Le formulaire donne $\mathcal{L}\{U(t)\} = 1/p$. La fonction retardée d’une unité vérifie $\mathcal{L}\{U(t-1)\} = e^{-p}/p$. Par linéarité de la transformée de Laplace, on transforme séparément les deux termes de $e(t) = 2U(t) - U(t-1)$, puis on soustrait la seconde transformée de la première. On obtient ainsi $E(p) = 2/p - e^{-p}/p$, soit la fraction simplifiée indiquée dans le résultat.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$$E(p) = \frac{2 - e^{-p}}{p}.$$

Partie B - Signal de sortie

Question 1. Démontrer que S(p) = 2/[p(p + 1)] - [1/(p(p + 1))]e⁻ᵖ.

La fonction de transfert vérifie $S(p) = H(p)E(p)$. On utilise $H(p) = 1/(p+1)$ et le résultat de la partie A, $E(p) = (2 - e^{-p})/p$. On multiplie ces expressions, puis on distribue le numérateur sur les deux termes : $S(p) = (2 - e^{-p})/[p(p+1)]$. Cette écriture est exactement la différence demandée, avec le retard exponentiel attaché au second terme.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $$S(p) = \frac{2}{p(p+1)} - \frac{e^{-p}}{p(p+1)}.$$

Question 2. Vérifier que 1/[p(p + 1)] = 1/p - 1/(p + 1).

On réduit les deux fractions du membre de droite au même dénominateur, $p(p+1)$. Le numérateur obtenu est $(p+1) - p = 1$. La fraction résultante est donc $1/[p(p+1)]$, ce qui vérifie l'égalité demandée. Cette décomposition sera utile pour appliquer séparément les transformées inverses des termes en $1/p$ et en $1/(p+1)$.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $$\frac{1}{p(p+1)} = \frac{1}{p} - \frac{1}{p+1}.$$

Question 3. Donner les transformées de Laplace inverses de 1/p, de 1/(p + 1), de (1/p)e⁻ᵖ et de (1/(p + 1))e⁻ᵖ.

Les deux premières inverses proviennent directement des transformées de $U(t)$ et de $e^{-t}U(t)$. Pour les deux dernières, le facteur e^{-p} correspond à un retard d'une unité : la fonction est évaluée en $t-1$ et multipliée par $U(t-1)$. Voici les quatre correspondances, dans l'ordre demandé.

Transformée	Transformée inverse
$1/p$	$U(t)$
$1/(p+1)$	$e^{-t}U(t)$
e^{-p}/p	$U(t-1)$
$e^{-p}/(p+1)$	$e^{-(t-1)}U(t-1)$

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> Dans l'ordre : $U(t)$, $e^{-t}U(t)$, $U(t-1)$, $e^{-(t-1)}U(t-1)$.

Question 4. **En déduire l'expression de s(t) sur l'intervalle [0 ; 1[.**

La décomposition précédente donne $S(p) = 2(1/p - 1/(p+1)) - e^{-p}(1/p - 1/(p+1))$. Les deux termes contenant e^{-p} sont des fonctions retardées d'une unité : ils sont nuls pour $0 \leq t < 1$. Il ne reste donc, sur l'intervalle demandé, que l'inverse de $2(1/p - 1/(p+1))$, soit $2(1 - e^{-t})$.

✓ **RÉPONSE À RETENIR**

Pour $t \in [0;1[$, $s(t) = 2(1 - e^{-t})$.

Question 5.a. **À partir de l'expression admise de s(t) sur [1 ; +∞[, calculer s(1), puis donner sa valeur exacte et une valeur approchée au dixième.**

Pour calculer la valeur au point de raccord, on remplace t par 1 dans l'expression admise pour $t \geq 1$: $s(1) = (e-2)e^{-1} + 1$. En mettant au même dénominateur, cette expression devient $2 - 2/e$. Sa valeur numérique est environ $1{,}26424$, donc l'arrondi au dixième est $1{,}3$.

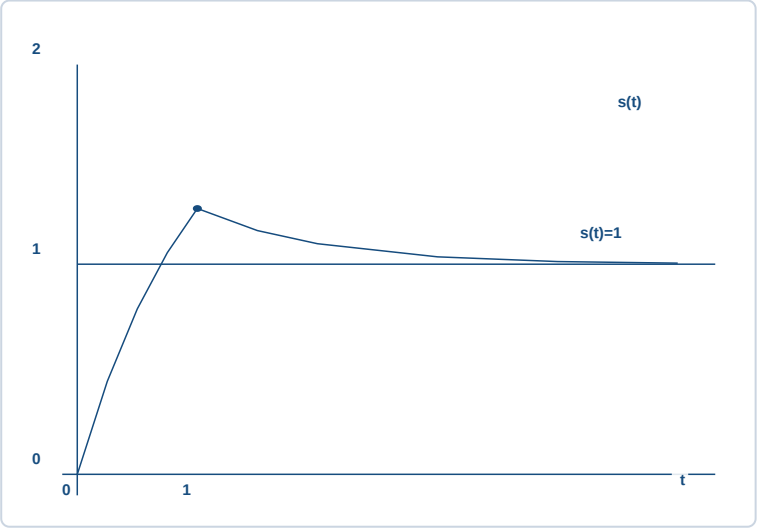
✓ **RÉPONSE À RETENIR**

$$s(1) = 2 - \frac{2}{e} \approx 1{,}3.$$

Question 5.b. **Sur le document-réponse à rendre avec la copie, compléter la courbe représentative de la fonction s.**

Sur $[0;1[$, la courbe suit $s(t) = 2(1 - e^{-t})$ et croît de 0 à $2 - 2/e$. Elle rejoint en $t = 1$ la branche définie pour $t \geq 1$, $s(t) = 1 + (e-2)e^{-t}$, puis décroît vers 1. Pour compléter le tracé, placer le point de raccord $(1; 2 - 2/e)$, dessiner les deux branches et faire apparaître l'asymptote horizontale $s = 1$.

Courbe du signal de sortie s(t)



✓ RÉPONSE À RETENIR

Courbe croissante jusqu'à $(1; 2 - 2/e)$, puis décroissante vers l'asymptote horizontale $s = 1$.

Question 5.c. Donner la limite de la fonction s(t) lorsque t tend vers +∞.

Pour $t \geq 1$, l'expression donnée est $s(t) = 1 + (e - 2)e^{-t}$. Lorsque t tend vers $+\infty$, e^{-t} tend vers 0. Le produit $(e - 2)e^{-t}$ tend donc lui aussi vers 0, puisque $e - 2$ est une constante. La limite de $s(t)$ est alors la constante restante, 1.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$\lim_{t \to +\infty} s(t) = 1.$

SYNTHÈSE DE L'ÉPREUVE & RÉFÉRENTIEL • BTS COIFFURE

Ce qu'il faut retenir de ce sujet (Session 2022)

Bilan de l'épreuve : Épreuve de mathématiques du BTS, session 2022, groupement B, code 22MATGRB2, d'une durée de deux heures. Le coefficient est de 1,5 en Conception et industrialisation en microtechniques et de 2 en Électrotechnique. Les deux exercices étudient le freinage d'un chariot et un système électrique, en mobilisant équations différentielles, fonctions, intégrales, développements limités et transformées de Laplace.

Notions-clés, formules & règles à maîtriser

- Pour y' + ay = b, la solution générale est la somme d'une solution particulière et des solutions de l'équation homogène associée.
- Si f(t) tend vers L lorsque t tend vers +∞, sa courbe admet l'asymptote horizontale d'équation y = L.
- La distance parcourue entre t_0 et t_1 est l'intégrale de la vitesse : $d = \int_{t_0}^{t_1} f(t)\,dt$.
- Le décalage f(t - a)U(t - a) correspond en transformée de Laplace à $F(p)e^{-ap}$.

Points de vigilance & attentes du jury

- Appliquer la condition initiale après avoir déterminé la famille générale des solutions de l'équation différentielle.
- Pour conclure sur l'arrêt du chariot, vérifier si sa vitesse atteint zéro, et pas seulement si elle diminue.
- Pour calculer une distance, évaluer la primitive aux deux bornes dans le bon ordre et conserver les unités.
- Pour les signaux décalés, appliquer le facteur exponentiel de Laplace et distinguer les intervalles avant et après t = 1.

Questions fréquentes sur cette épreuve (Q&A Examen)

Q : Comment trouver la solution de l'équation différentielle du freinage ?

Résolvez d'abord l'équation homogène y' + 0,8y = 0, puis ajoutez une solution particulière constante de l'équation complète. La condition f(0) = 20 permet ensuite de déterminer la constante restante.

Q : Comment obtenir la distance parcourue entre deux instants ?

Une primitive F de la vitesse f donne la distance $d = F(t_1) - F(t_0)$. Ici, évaluez la primitive fournie en 1 puis en 0, et arrondissez le résultat au centimètre.

Q : Comment organiser le temps pendant cette épreuve de deux heures ?

Le sujet comporte deux exercices de 10 points chacun, et les trois parties du premier exercice sont indépendantes. Répartissez le temps entre les exercices et gardez une marge pour vérifier les calculs et les tracés.

Q : Quel coefficient s'applique à cette épreuve de mathématiques ?

Le coefficient dépend de la spécialité du BTS : il est de 1,5 en Conception et industrialisation en microtechniques et de 2 en Électrotechnique. Vérifiez la spécialité concernée plutôt que d'appliquer un coefficient unique.

Sujet officiel associé (PDF) : https://btscoiffure.fr/assets/annales/bts-coiffure/E2 - Mathématiques/2022/BTS Coiffure - E2 - Mathématiques - Session 2022 - 2-Sujet.pdf

Ressources BTS Coiffure : Toutes les annales & corrigés • Fiches de révision complètes • Simulateur de notes d'examen

Copyright © 2027 FormaV®. Tous droits réservés.

FormaV® est une marque déposée auprès de l'INPI sous le numéro 5227897.

Ce document a été élaboré par FormaV® avec le plus grand soin afin d'accompagner chaque apprenant vers la réussite de ses examens. Son contenu (textes, graphiques, méthodologies, tableaux, exercices, concepts, mises en forme) constitue une œuvre protégée par le droit d'auteur.

Toute copie, partage, reproduction, diffusion ou mise à disposition, même partielle, gratuite ou payante, est strictement interdite sans accord préalable et écrit de FormaV®, conformément aux articles L.111-1 et suivants du Code de la propriété intellectuelle. Dans une logique anti-plagiat, FormaV® se réserve le droit de vérifier toute utilisation illicite, y compris sur les plateformes en ligne ou sites tiers.

En utilisant ce document, vous vous engagez à respecter ces règles et à préserver l'intégrité du travail fourni. La consultation de ce document est strictement personnelle.

Merci de respecter le travail accompli afin de permettre la création continue de ressources pédagogiques fiables et accessibles.