Ce document a été mis en ligne par l'organisme FormaV®.

Toute reproduction, représentation ou diffusion, même partielle, sans autorisation préalable, est strictement interdite.

Pour en savoir plus sur nos formations disponibles, veuillez visiter :
formav.co/explorer

BTS Coiffure

Mathématiques

Session 2022 • Code sujet : **22-MATGRD1** • Durée : **2 heures** • Coefficient : **Analyses de biologie médicale : 1 ; Bio analyses et contrôles : 2 ; Biotechnologies : 1 ; Europlastics et composites : 1,5 ; Bioqualité : 2**

Sommaire

Cliquez sur une partie pour y accéder directement

1. Modélisation de l'évolution du nombre de personnes équipées d'un implant médical (13 questions) **Page 3**

2. Probabilités, pannes et contrôle de la qualité d'une machine à embouteiller (9 questions) **Page 7**

3. Ce qu'il faut retenir & Questions fréquentes (FAQ) (Synthèse & Q&A Examen) **Page 10**

Sujet officiel (PDF) : https://btscoiffure.fr/assets/annales/bts-coiffure/E2 - Mathématiques/2022/BTS Coiffure - E2 - Mathématiques - Session 2022 - 3-Sujet.pdf

1. Modélisation de l’évolution du nombre de personnes équipées d’un implant médical

Dans un pays de 60 millions d’habitants, on étudie depuis 2013 le nombre de personnes équipées d’un implant médical à partir de données annuelles. Deux modèles sont étudiés : un ajustement exponentiel et une fonction issue de la résolution d’une équation différentielle.

Partie A

Question 1. Compléter le tableau fourni en annexe avec les valeurs de y = ln(N - 30), arrondies au millième.

On calcule $y_i = \ln(N_i - 30)$, avec N_i en milliers. Les valeurs arrondies au millième sont présentées dans le tableau.

Année	2013	2014	2015	2016	2017	2018	2019	2020	2021
y_i	3,268	3,336	3,418	3,497	3,578	3,656	3,738	3,818	3,898

✓ RÉPONSE À RETENIR

$3{,}268;\ 3{,}336;\ 3{,}418;\ 3{,}497;\ 3{,}578;\ 3{,}656;\ 3{,}738;\ 3{,}818;\ 3{,}898$

Question 2.a. À l’aide de la calculatrice, déterminer par la méthode des moindres carrés une équation de la droite d’ajustement du nuage de points $M_i(k_i ; y_i)$, sous la forme y = ak + b, avec a et b arrondis au centième.

La régression linéaire des neuf points $(k_i ; y_i)$, pour $k_i = 0, 1, \ldots, 8$, donne une pente d’environ $0{,}0794$ et une ordonnée à l’origine d’environ $3{,}2606$. On arrondit chacun des deux coefficients au centième, comme demandé.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$y = 0{,}08k + 3{,}26$

Question 2.b. À partir de l’équation de la droite d’ajustement, déduire que le nombre N(k), exprimé en milliers, de personnes équipées de l’implant peut être modélisé par N(k) = 30 + 26,05e^(0,08k).

La droite d’ajustement donne $\ln(N - 30) = 0{,}08k + 3{,}26$. En exponentiant, $N = 30 + e^{3{,}26}e^{0{,}08k}$. Comme $e^{3{,}26} \approx 26{,}05$, on obtient le modèle demandé, avec N exprimé en milliers.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$N(k) = 30 + 26{,}05e^{0{,}08k}$, en milliers.

Question 3.a. **En supposant que le modèle proposé reste valide, déterminer au millier près le nombre de personnes équipées de l'implant en 2026.**

En 2026, le rang vaut $k = 2026 - 2013 = 13$. Ainsi, $N(13) = 30 + 26{,}05e^{0{,}08\times 13} \approx 103{,}701$ milliers de personnes. Arrondi au millier près, le modèle prévoit 104 000 personnes équipées.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> 104 000 personnes.

Question 3.b. **Si le nombre d'habitants du pays reste stable sur le long terme, le modèle étudié reste-t-il valide à long terme ? Justifier la réponse.**

Quand $k \to +\infty$, le terme $26{,}05e^{0{,}08k}$ tend vers $+\infty$. Le modèle prévoit donc un nombre de personnes équipées sans limite, alors que la population du pays reste fixée à 60 millions.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> Non : à long terme, le modèle dépasserait la population de 60 millions d'habitants.

Partie B

Question 1.a. **Résoudre sur [0 ; +∞[l'équation différentielle homogène (E₀) : y' + 0,05y = 0.**

L'équation homogène $y' + 0{,}05y = 0$ a pour solutions les fonctions exponentielles de la forme $y(t) = Ce^{-0{,}05t}$, où C est une constante réelle. Cette expression est valable sur l'intervalle demandé.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $y(t) = Ce^{-0{,}05t}$, avec $C \in \mathbb{R}$.

Question 1.b. **Déterminer une solution constante de l'équation différentielle (E) : y' + 0,05y = 0,05.**

1. Pour une solution constante $y(t) = c$, on a $y'(t) = 0$.
2. L'équation devient $0{,}05c = 0{,}05$, donc $c = 1$.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> Une solution constante est $y(t) = 1$.

Question 1.c. **Résoudre sur [0 ; +∞[l'équation différentielle (E) : y' + 0,05y = 0,05.**

Une solution particulière de (E) est la constante 1. On ajoute à cette solution la solution générale de l'équation homogène associée, $Ce^{-0,05t}$, pour obtenir toutes les solutions de (E).

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $y(t) = 1 + Ce^{-0,05t}$, avec $C \in \mathbb{R}$.

Question 1.d. **Sachant que g(0) = 8, en déduire une expression de la fonction g sur [0 ; +∞[.**

Dans la solution générale, $g(0) = 1 + C = 8$, donc $C = 7$. En remplaçant cette constante, on obtient l'expression de g.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $g(t) = 1 + 7e^{-0,05t}$.

Question 2. **À l'aide du modèle f(t) = 450/(1 + 7e^(-0,05t)), où t est le nombre d'années écoulées depuis 2013 et f(t) est exprimée en milliers, déterminer au millier près le nombre de personnes équipées de l'implant en 2026.**

De 2013 à 2026, il s'écoule $t = 13$ ans. Le modèle donne $f(13) = \dfrac{450}{1 + 7e^{-0,05 \times 13}} \approx 96,685$ milliers de personnes. Arrondi au millier près, cela représente 97 000 personnes.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> 97 000 personnes.

Question 3. **Déterminer la limite de f en +∞ et interpréter le résultat dans le contexte de l'exercice.**

Quand $t \to +\infty$, $e^{-0,05t} \to 0$. Le dénominateur de $f(t) = \dfrac{450}{1 + 7e^{-0,05t}}$ tend donc vers 1. Comme f est exprimée en milliers, la limite s'interprète comme le nombre maximal prédit par le modèle.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $\lim_{t \to +\infty} f(t) = 450$, soit 450 000 personnes.

Question 4. À partir de l'expression de f'(t) obtenue par logiciel de calcul formel, déterminer le sens de variation de f sur [0 ; +∞[et interpréter le résultat dans le contexte de l'exercice.

Pour $t \geq 0$, on a $e^{-0{,}05t} > 0$. Dans $f'(t) = \dfrac{315e^{-0{,}05t}}{2(1+7e^{-0{,}05t})^2}$, le numérateur et le dénominateur sont donc strictement positifs. Ainsi, $f'(t) > 0$ sur l'intervalle considéré.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> f est strictement croissante : le nombre de personnes équipées augmente.

Question 5. Déterminer à partir de quelle année le nombre de personnes équipées de l'implant dépassera 120 000, soit 120 milliers, et expliquer la méthode employée.

Résoudre $f(t) > 120$ revient à résoudre $e^{-0{,}05t} < \dfrac{11}{28}$, soit $t > -20\ln\left(\dfrac{11}{28}\right) \approx 18{,}69$. Le seuil est donc dépassé après 18,69 ans depuis 2013. À l'année entière, il est dépassé pour $t = 19$, qui correspond à 2032.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> À partir de 2032.

2. Probabilités, pannes et contrôle de la qualité d'une machine à embouteiller

Dans une usine, une machine à embouteiller est alimentée par un réservoir d'eau et une file de bouteilles vides. L'exercice porte sur les défauts d'approvisionnement, les pannes sur 200 jours et le contrôle statistique du volume d'eau contenu dans les bouteilles.

Partie A - Défaut d'approvisionnement

Question Tableau. Pour chacune des quatre phrases du tableau de gauche, écrire le numéro de la phrase associé à la lettre de l'information correspondante du tableau de droite. Les phrases portent sur la probabilité que la file d'entrée ne se vide pas, l'événement où la file est vide mais pas le réservoir, la probabilité que les deux soient vides, et la probabilité d'un défaut d'approvisionnement. Aucune justification n'est demandée.

On associe chaque phrase à l'information correspondante : la probabilité que la file ne se vide pas vaut $P(\overline{A}) = 1 - 0{,}03 = 0{,}97$. « File vide mais réservoir non vide » désigne $A \cap \overline{B}$. L'événement « les deux sont vides » est $A \cap B$, de probabilité $0{,}03 \times 0{,}02 = 0{,}0006$. Enfin, le défaut d'approvisionnement est $A \cup B$, de probabilité $0{,}03 + 0{,}02 - 0{,}0006 = 0{,}0494$.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> 1-E ; 2-C ; 3-F ; 4-D.

Partie B - Pannes de la machine à embouteiller

Question 1. La probabilité de panne un jour donné est 0,025 et les pannes des différents jours sont indépendantes. Donner, sans justification, la loi de probabilité de X, nombre de jours de panne sur une période de 200 jours, et préciser ses paramètres.

Sur chacun des 200 jours, la machine tombe en panne avec la probabilité constante $0{,}025$. Une panne constitue un succès et son absence un échec. Les jours étant indépendants, le nombre total de jours avec panne suit une loi binomiale. Son premier paramètre est le nombre d'essais, soit 200 jours, et son second est la probabilité de panne par jour.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $X \sim \mathcal{B}(200\,;\,0{,}025)$.

Question 2.a. La loi de X peut être approchée par une loi de Poisson de paramètre λ. Justifier que λ = 5.

1. Pour approcher une loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$ par une loi de Poisson, on prend le paramètre $\lambda = np$. Ici, la période compte 200 jours et la probabilité quotidienne de panne est $0{,}025$. Le paramètre de la loi approchante est donc $200 \times 0{,}025 = 5$.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$\lambda = 5$.

Question 2.b. **Pour une variable aléatoire Y suivant une loi de Poisson de paramètre 5, donner la valeur de P(Y ≤ 10), arrondie à 10^{-3}.**

Pour $Y \sim \mathcal{P}(5)$, on additionne les probabilités associées aux valeurs entières de 0 à 10. Ainsi, $P(Y \leq 10) = e^{-5} \sum_{k=0}^{10} \frac{5^k}{k!}$, soit environ $0{,}9863047$. L'arrondi au millième est donc obtenu en conservant trois chiffres après la virgule.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$P(Y \leq 10) \approx 0{,}986$.

Question 2.c. **Le graphique suggère que P(Y = 15) est égale à 0. À l'aide de la formule donnée pour P(Y = k), déterminer si cette conjecture est vraie ou fausse et justifier.**

Pour tout entier positif k, $P(Y = k) = \dfrac{5^k e^{-5}}{1 \times 2 \times \cdots \times k}$.

Avec $k = 15$, le numérateur et le dénominateur sont strictement positifs. La probabilité n'est donc pas nulle, même si sa très petite valeur est difficile à distinguer de zéro sur le graphique.

✓ RÉPONSE À RETENIR

Conjecture fausse : $P(Y = 15) \approx 0{,}000157245 > 0$.

Partie C - Qualité de l'embouteillement

Question 1. **À l'aide de la calculatrice, déterminer la moyenne et l'écart type de l'échantillon de 100 bouteilles, dont les volumes sont 73, 74, 75, 76 et 77 cL avec des effectifs respectifs de 17, 20, 43, 13 et 7. Arrondir l'écart type à 10^{-2}.**

La moyenne pondérée est $\bar{x} = \dfrac{73 \times 17 + 74 \times 20 + 75 \times 43 + 76 \times 13 + 77 \times 7}{100} = 74{,}73$ cL. Pour l'écart type de la série, on calcule la racine carrée de la moyenne des carrés moins le carré de la moyenne : $\sigma = \sqrt{\dfrac{17 \times 73^2 + 20 \times 74^2 + 43 \times 75^2 + 13 \times 76^2 + 7 \times 77^2}{100} - 74{,}73^2} \approx 1{,}1032$ cL.

✓ RÉPONSE À RETENIR

Moyenne : 74,73 cL ; écart type : 1,10 cL.

Question 2.a. **Pour le test bilatéral H_0 : $\mu = 75$ contre H_1 : $\mu \neq 75$, au seuil de confiance de 95 %, la moyenne Z d'un échantillon de 100 bouteilles suit sous H_0 une loi normale d'espérance 75 et d'écart type 0,11. Déterminer h tel que $P(75 - h \leq Z \leq 75 + h) \approx 0{,}95$, à 10^{-2} près.**

1. La loi normale centrée réduite a un intervalle central de probabilité 0,95 délimité par les quantiles $-1{,}96$ et $1{,}96$. La demi-largeur recherchée est donc le quantile positif multiplié par l'écart type de Z sous H_0 : $h = 1{,}96 \times 0{,}11 = 0{,}2156$ cL. L'arrondi au centième donne $0{,}22$ cL.

> **✓ RÉPONSE À RETENIR**
>
> $h \approx 0{,}22$ cL.

Question 2.b. **Énoncer la règle de décision du test bilatéral de l'hypothèse H_0 : $\mu = 75$ au seuil de confiance de 95 %.**

On compare la moyenne observée $\bar{x}$ à l'intervalle central de 95 % calculé sous l'hypothèse H_0. Avec la demi-largeur arrondie au centième, cet intervalle est $[75 - 0{,}22\,;\ 75 + 0{,}22]$.

- Si $\bar{x}$ appartient à l'intervalle, on ne rejette pas H_0.
- Si $\bar{x}$ est à l'extérieur, on rejette H_0.

> **✓ RÉPONSE À RETENIR**
>
> Ne pas rejeter H_0 si $74{,}78 \leq \bar{x} \leq 75{,}22$; la rejeter sinon.

Question 2.c. **À partir des résultats de l'échantillon fourni, déterminer si l'hypothèse H_0 : $\mu = 75$ peut être acceptée.**

La moyenne observée à la question 1 est $74{,}73$ cL. La borne basse de l'intervalle de décision est $74{,}78$ cL. La moyenne de l'échantillon est donc inférieure à cette borne et n'appartient pas à l'intervalle de valeurs retenues sous H_0.

> **✓ RÉPONSE À RETENIR**
>
> On rejette H_0 : $74{,}73 \notin [74{,}78\,;\ 75{,}22]$.

Ce qu'il faut retenir de ce sujet (Session 2022)

Bilan de l'épreuve : Épreuve de mathématiques du BTS, groupement D1, session 2022, code 22-MATGRD1, d'une durée de deux heures, avec un coefficient variable selon la spécialité. Les deux exercices, notés chacun sur 10 points, étudient la modélisation de l'équipement en implant médical et le fonctionnement d'une machine à embouteiller. Les compétences mobilisées sont l'ajustement, les équations différentielles, les probabilités et les tests statistiques.

Notions-clés, formules & règles à maîtriser

- Pour modéliser N(k) = 30 + Ae^(ak), poser y = ln(N - 30) transforme la relation en un modèle affine.
- Sur n jours indépendants avec une probabilité de panne p, X suit une loi binomiale B(n,p) ; l'approximation de Poisson utilise λ = np.
- Pour deux événements indépendants A et B, P(A ∩ B) = P(A)P(B) et P(A ∪ B) = P(A) + P(B) - P(A ∩ B).
- Dans un test bilatéral à 95 %, la moyenne observée est comparée à l'intervalle centré sur la moyenne supposée sous H_0.

Points de vigilance & attentes du jury

- Respecter les unités : les effectifs de l'exercice 1 sont en milliers et le temps est compté en années depuis 2013.
- Calculer y = ln(N - 30) en associant correctement chaque valeur au rang k et appliquer les arrondis demandés.
- Distinguer événement contraire, intersection et réunion ; ne mobiliser l'indépendance que lorsqu'elle est donnée.
- Pour le test, énoncer la règle de décision et comparer la moyenne observée aux bornes calculées sous H_0.

Questions fréquentes sur cette épreuve (Q&A Examen)

Q : Comment passer des données au modèle exponentiel dans l'exercice 1 ?

On calcule y = ln(N - 30) pour chaque valeur, puis on ajuste une droite aux points (k, y). L'équation affine permet ensuite de retrouver le modèle en exponentiant et en réintroduisant le terme 30.

Q : Pourquoi P(Y = 15) n'est-elle pas nulle pour la loi de Poisson étudiée ?

Avec un paramètre λ positif, la formule P(Y = k) = e^(-λ)λ^k/k! est strictement positive pour tout entier k. Le graphique peut seulement rendre les faibles probabilités difficiles à distinguer de zéro.

Q : Comment répartir le temps pendant cette épreuve de deux heures ?

Les deux exercices valent chacun 10 points et comportent des parties indépendantes. Repérez d'abord les questions accessibles, répartissez le temps entre les exercices et gardez quelques minutes pour vérifier les calculs, les unités et les arrondis.

Q : Comment conclure le test bilatéral sur le réglage de la machine ?

Comparez la moyenne de l'échantillon aux bornes de l'intervalle d'acceptation construit sous H_0 au seuil de 95 %. Si elle est comprise dans l'intervalle, on ne rejette pas H_0 ; sinon, on la rejette.

Sujet officiel associé (PDF) : https://btscoiffure.fr/assets/annales/bts-coiffure/E2 - Mathématiques/2022/BTS Coiffure - E2 - Mathématiques - Session 2022 - 3-Sujet.pdf
Ressources BTS Coiffure : Toutes les annales & corrigés • Fiches de révision complètes • Simulateur de notes d'examen

Copyright © 2027 FormaV®. Tous droits réservés.

FormaV® est une marque déposée auprès de l'INPI sous le numéro 5227897.

Ce document a été élaboré par FormaV® avec le plus grand soin afin d'accompagner chaque apprenant vers la réussite de ses examens. Son contenu (textes, graphiques, méthodologies, tableaux, exercices, concepts, mises en forme) constitue une œuvre protégée par le droit d'auteur.

Toute copie, partage, reproduction, diffusion ou mise à disposition, même partielle, gratuite ou payante, est strictement interdite sans accord préalable et écrit de FormaV®, conformément aux articles L.111-1 et suivants du Code de la propriété intellectuelle. Dans une logique anti-plagiat, FormaV® se réserve le droit de vérifier toute utilisation illicite, y compris sur les plateformes en ligne ou sites tiers.

En utilisant ce document, vous vous engagez à respecter ces règles et à préserver l'intégrité du travail fourni. La consultation de ce document est strictement personnelle.

Merci de respecter le travail accompli afin de permettre la création continue de ressources pédagogiques fiables et accessibles.