Ce document a été mis en ligne par l'organisme FormaV®.

Toute reproduction, représentation ou diffusion, même partielle, sans autorisation préalable, est strictement interdite.

Pour en savoir plus sur nos formations disponibles, veuillez visiter :
formav.co/explorer

BTS Coiffure

Mathématiques - Groupement B

Session 2023 • Code sujet : **23MATGRB2** • Durée : **2 heures** • Coefficient : **1,5 en conception et industrialisation en microtechniques ; 2 en électrotechnique**

Sommaire

Cliquez sur une partie pour y accéder directement

1. Fermeture d’un tiroir : équation différentielle et étude de fonction (12 questions) **Page 3**

2. Étude d’une fonction périodique par séries de Fourier (10 questions) **Page 8**

3. Ce qu’il faut retenir & Questions fréquentes (FAQ) (Synthèse & Q&A Examen) **Page 11**

Sujet officiel (PDF) : https://btscoiffure.fr/assets/annales/bts-coiffure/E2 - Mathématiques/2023/BTS Coiffure - E2 - Mathématiques - Session 2023 - 2-Sujet.pdf

1. Fermeture d’un tiroir : équation différentielle et étude de fonction

La fonction f(t), exprimée en centimètres, modélise la distance entre le fond du tiroir et celui du meuble pendant la fermeture, t étant exprimé en secondes. L’exercice mobilise une équation différentielle et ses conditions initiales, puis l’étude des variations, un algorithme de recherche du seuil de fermeture et le calcul d’une position moyenne.

Partie A

Question 1.a. Résoudre l’équation caractéristique r² + 5r + 4 = 0.

On résout le trinôme du second degré en cherchant deux nombres dont le produit vaut 4 et la somme 5. Ces nombres sont 1 et 4, donc $r^2 + 5r + 4 = (r + 1)(r + 4)$. Un produit est nul si l’un de ses facteurs est nul. On résout alors séparément $r + 1 = 0$ et $r + 4 = 0$, ce qui donne les deux racines réelles distinctes de l’équation caractéristique.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $r = -1$ ou $r = -4$.

Question 1.b. À l’aide du tableau fourni, résoudre l’équation différentielle (E₀) : y'' + 5y' + 4y = 0.

Les racines de l’équation caractéristique sont les deux réels distincts -1 et -4. Le tableau fourni associe à chaque racine r_i un terme exponentiel $C_i e^{r_i t}$. La solution générale est donc la somme de ces deux termes, avec deux constantes réelles indépendantes. Cette expression décrit toutes les solutions de l’équation différentielle sur l’intervalle considéré ; les conditions initiales ne sont pas encore imposées dans cette question.

On remplace simplement les deux racines trouvées dans la forme indiquée par le tableau.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $y(t) = C_1 e^{-t} + C_2 e^{-4t}$, avec $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$.

Question 2.a. À partir de la situation initiale, où M se trouve à 20 cm de O et se déplace vers O à la vitesse de -10 cm·s⁻¹, déduire les valeurs de f(0) et de f'(0).

La fonction f représente la distance entre les points O et M, exprimée en centimètres. À l’instant initial, cette distance est de 20 cm : cela donne directement la valeur de $f(0)$. La vitesse de rapprochement, exprimée en centimètres par seconde, correspond à la dérivée de cette distance par rapport au temps. Le signe négatif indique que la distance diminue pendant la fermeture du tiroir.

On reprend donc les deux données initiales sans transformation supplémentaire.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $f(0) = 20$ cm et $f'(0) = -10$ cm$\cdot$s^{-1}.

Question 2.b. **En admettant que f(t) = (70/3)e⁻ᵗ - (10/3)e⁻⁴ᵗ, déterminer la valeur exacte de la distance OM deux secondes après le début de la fermeture.**

La distance est donnée par $f(t) = \frac{70}{3}e^{-t} - \frac{10}{3}e^{-4t}$. Deux secondes après le début de la fermeture, on pose $t = 2$ dans cette expression. On conserve les exponentielles pour obtenir la valeur exacte, puis on évalue cette expression pour donner une approximation en centimètres, adaptée à la lecture de la distance.

Le calcul donne environ $3{,}16$ cm au centième.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $f(2) = \dfrac{70}{3}e^{-2} - \dfrac{10}{3}e^{-8} \approx 3{,}16 \text{ cm}.$

Question 2.c. **Le tiroir est dit fermé lorsque la distance OM est inférieure à 0,5 cm. Déterminer, en justifiant, si le constructeur a raison d'affirmer que le tiroir est fermé en moins de quatre secondes.**

On calcule la distance au bout de quatre secondes en remplaçant t par 4 dans l'expression donnée. On obtient $f(4) = \frac{70}{3}e^{-4} - \frac{10}{3}e^{-16} \approx 0{,}427$ cm, donc une distance strictement inférieure à 0,5 cm. La fonction est continue. Puisque cette inégalité est stricte à $t = 4$, elle reste vraie pour des instants suffisamment proches de 4, y compris certains instants antérieurs à 4.

Le tiroir est donc fermé avant quatre secondes.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> Oui : le tiroir est fermé en moins de 4 secondes.

Partie B

Question 1.a. **En utilisant la limite de e⁻ᵘ lorsque u tend vers +∞, déterminer la limite de f(t) lorsque t tend vers +∞.**

La fonction considérée est $f(t) = \frac{70}{3}e^{-t} - \frac{10}{3}e^{-4t}$. Lorsque t tend vers $+\infty$, les quantités t et $4t$ tendent aussi vers $+\infty$. Par conséquent, les exposants $-t$ et $-4t$ tendent vers $-\infty$, et chacune des deux exponentielles tend vers 0. La limite de leur combinaison est donc nulle.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $\lim\limits_{t \to +\infty} f(t) = 0.$

Question 1.b. Déduire de la limite précédente que la courbe représentative de f possède une asymptote, puis en donner une équation.

Une courbe représentative admet une asymptote horizontale lorsque la fonction tend vers une valeur finie à l'infini. La limite déterminée à la question précédente vaut 0 : la courbe se rapproche donc de l'axe des abscisses lorsque t devient très grand. L'équation de cet axe, dans le repère usuel, donne directement l'équation de l'asymptote.

> La valeur limite est l'ordonnée constante de l'asymptote horizontale.

✓ RÉPONSE À RETENIR

Asymptote horizontale : $y = 0$.

Question 2.a. Déterminer l'expression de la dérivée f'(t) pour tout t appartenant à [0 ; +∞[.

On dérive chacun des deux termes de f en utilisant la règle $(e^{at})' = ae^{at}$. Pour le premier terme, l'exposant a pour coefficient -1. Pour le second, la dérivée de l'exponentielle apporte le facteur -4, qui se combine avec le coefficient initial négatif. On additionne ensuite les dérivées obtenues.

Cette expression vaut pour tout $t \in [0; +\infty[$.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$f'(t) = -\dfrac{70}{3}e^{-t} + \dfrac{40}{3}e^{-4t}$.

Question 2.b. Sachant que f'(t) < 0 sur [0 ; +∞[, établir le tableau de variations de f sur cet intervalle.

Comme $f'(t) < 0$ sur tout l'intervalle, la fonction est strictement décroissante. À l'origine, $f(0) = \frac{70}{3} - \frac{10}{3} = 20$. La limite en $+\infty$ vaut 0. Le tableau traduit donc une décroissance depuis la valeur 20 vers la limite 0, sans que celle-ci soit atteinte à une valeur finie de t.

t	**0**	$+\infty$
$f'(t)$		$-$
$f(t)$	20	$\searrow$ 0

✓ RÉPONSE À RETENIR

f décroît de 20 vers 0 sur $[0; +\infty[$.

Question 3.a. **Compléter le tableau d'exécution de l'algorithme à partir de la ligne 36, en ajoutant si nécessaire des lignes jusqu'à l'arrêt. Indiquer t, la valeur de f(t) arrondie au centième et le résultat du test f(t) > 0,5.**

Les lignes indiquent la valeur de t après chaque incrément de 0,1 seconde. On évalue $f(t)$ à ces instants, puis on teste si elle est strictement supérieure à 0,5. Le test est encore vrai à 3,8 secondes, mais devient faux à 3,9 secondes. L'algorithme s'arrête à cette dernière ligne.

Ligne	t	$f(t)$ **au centième**	**Test** $f(t) > 0{,}5$
36	3,6	0,64	VRAI
37	3,7	0,58	VRAI
38	3,8	0,52	VRAI
39	3,9	0,47	FAUX

✓ **RÉPONSE À RETENIR**

L'algorithme s'arrête à la ligne 39, pour $t = 3{,}9$.

Question 3.b. **Donner la valeur de la variable t à la fin de l'exécution de l'algorithme, puis interpréter le résultat dans le contexte de la fermeture du tiroir.**

L'algorithme augmente t par pas de 0,1 tant que la distance reste supérieure à 0,5 cm. Le test est vrai à $t = 3{,}8$, puis faux à $t = 3{,}9$. La variable conserve donc la première valeur pour laquelle le test échoue, et non la dernière valeur pour laquelle il est vrai.

1. À 3,8 s, le tiroir n'a pas encore atteint le seuil.
2. À 3,9 s, sa distance est inférieure à 0,5 cm : il est fermé selon le modèle.

✓ **RÉPONSE À RETENIR**

À l'arrêt, $t = 3{,}9$ s. Le seuil est franchi entre 3,8 et 3,9 s.

Question 4. **La position moyenne du tiroir sur l'intervalle [0 ; 4] est définie par m = (1/4)∫₀⁴ f(t)dt. Démontrer que m = 45/8 - (35/6)e⁻⁴ + (5/24)e⁻¹⁶.**

Une primitive de f est $F(t) = -\frac{70}{3}e^{-t} + \frac{5}{6}e^{-4t}$, car sa dérivée redonne les deux termes de f. On applique ensuite la relation entre intégrale et primitive, puis on divise par 4 conformément à la définition de la moyenne :

$$m = \frac{1}{4}\big(F(4) - F(0)\big) = \frac{1}{4}\left[\frac{70}{3}(1 - e^{-4}) - \frac{5}{6}(1 - e^{-16})\right].$$

En regroupant les termes constants et les termes exponentiels, on obtient bien l'expression demandée.

✓ **RÉPONSE À RETENIR**

$m = \dfrac{45}{8} - \dfrac{35}{6}e^{-4} + \dfrac{5}{24}e^{-16}$ cm.

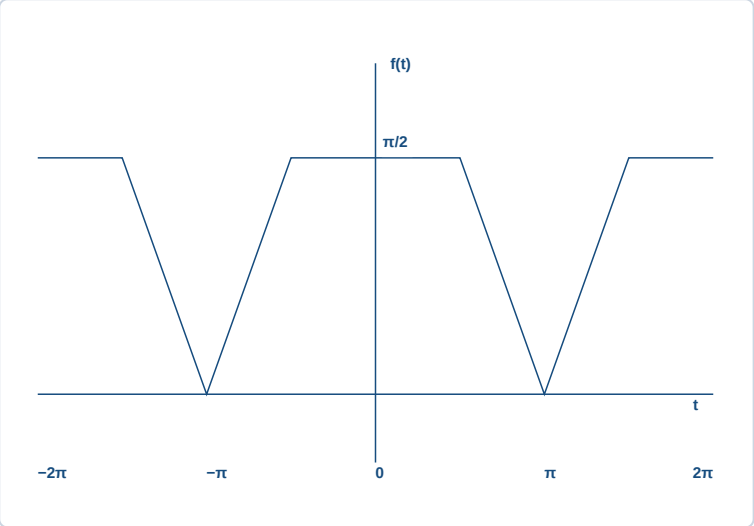
2. Étude d’une fonction périodique par séries de Fourier

L’exercice porte sur une fonction paire de période 2π, définie par morceaux sur une demi-période. Il demande de tracer sa représentation, d’établir des coefficients de Fourier, de construire une somme partielle d’ordre 3 et d’étudier l’approximation de la valeur efficace à partir de ces coefficients.

Question 1. Sur le document-réponse, tracer la représentation graphique de la fonction f sur l’intervalle [-2π ; 2π], en tenant compte de sa définition et de sa périodicité.

Sur une période, le graphe est constant à $\pi/2$ de $-\pi/2$ à $\pi/2$. Il rejoint ensuite 0 en $t = \pm\pi$ par des segments obliques. Répéter ce motif par translations de 2π donne le tracé sur $[-2\pi ; 2\pi]$. Les points remarquables sont donc les minima $(k\pi, 0)$ et les portions horizontales de hauteur $\pi/2$ autour des multiples pairs de $\pi/2$.

Représentation de f sur [-2π ; 2π]



✓ RÉPONSE À RETENIR

Graphe périodique de période 2π, de hauteur maximale $\pi/2$ et nul en $t = -\pi, \pi$.

Question 2. Démontrer que, pour tout entier n supérieur ou égal à 1, le coefficient de Fourier b_n est nul.

La formule donne $b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\sin(nt)\,dt$. Comme f est paire et $\sin(nt)$ est impaire, leur produit est impair. Ce produit est aussi 2π-périodique puisque n est entier. Son intégrale sur $[0; 2\pi]$ est donc égale à son intégrale sur $[-\pi; \pi]$, qui est nulle par imparité.

✓ RÉPONSE À RETENIR

Pour tout entier $n \geq 1$, $b_n = 0$.

Question 3. **Déterminer la pulsation ω associée à la fonction f.**

La pulsation d'une fonction périodique de période T est $\omega = \frac{2\pi}{T}$. Ici, la période donnée est $T = 2\pi$. Ainsi, $\omega = \frac{2\pi}{2\pi} = 1$. La variable étant exprimée en radians, cette valeur correspond à une pulsation de 1 radian par unité de temps.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$\omega = 1$.

Question 4. **Démontrer que le coefficient a₀ vaut 3π/8.**

D'après le formulaire, $a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\,dt$. La fonction étant paire et de période 2π, cela revient à $a_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} f(t)\,dt$. Sur $[0;\pi/2]$, l'aire vaut $\pi^2/4$. Sur $[\pi/2;\pi]$, elle vaut $\int_{\pi/2}^{\pi}(\pi - t)\,dt = \pi^2/8$. On obtient ainsi $a_0 = 3\pi/8$.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$$a_0 = \frac{3\pi}{8}.$$

Question 5. **Démontrer que, pour tout entier n supérieur ou égal à 1, aₙ = ∫₀^(π/2) cos(nt)dt + (2/π)∫_(π/2)^π (π - t)cos(nt)dt.**

Le formulaire donne, pour une fonction paire, $a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(t)\cos(nt)\,dt$. Sur $[0;\pi/2]$, on remplace $f(t)$ par $\pi/2$; sur $[\pi/2;\pi]$, on remplace $f(t)$ par $\pi - t$. En séparant l'intégrale et en distribuant le facteur $2/\pi$, le premier terme devient $\int_0^{\pi/2}\cos(nt)\,dt$, ce qui donne l'égalité demandée.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$$a_n = \int_0^{\pi/2}\cos(nt)\,dt + \frac{2}{\pi}\int_{\pi/2}^{\pi}(\pi - t)\cos(nt)\,dt.$$

Question 6. **En admettant que aₙ = 2/(πn²)(cos(nπ/2) - cos(nπ)), déterminer les valeurs exactes de a₁, a₂ et a₃.**

On utilise la formule admise $a_n = \frac{2}{\pi n^2}\left(\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) - \cos(n\pi)\right)$. Pour $n = 1$, la différence des cosinus vaut 1. Pour $n = 2$, elle vaut -2. Pour $n = 3$, elle vaut 1. En substituant ces valeurs dans la formule, on obtient les trois coefficients exacts.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$$a_1 = \frac{2}{\pi},\quad a_2 = -\frac{1}{\pi},\quad a_3 = \frac{2}{9\pi}.$$

Question 7. Déduire l'expression de la somme partielle d'ordre 3 : $s_3(t) = 3\pi/8 + (2/\pi)\cos(t) - (1/\pi)\cos(2t) + (2/(9\pi))\cos(3t)$.

La somme partielle d'ordre 3 est $s_3(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{3} a_n \cos(nt)$, puisque les coefficients b_n sont nuls. En utilisant $a_0 = 3\pi/8$ et les trois coefficients obtenus à la question précédente, on remplace chaque coefficient dans cette expression. Les termes en cosinus sont alors ceux de la somme partielle demandée.

✓ **RÉPONSE À RETENIR**

$$s_3(t) = \frac{3\pi}{8} + \frac{2}{\pi}\cos(t) - \frac{1}{\pi}\cos(2t) + \frac{2}{9\pi}\cos(3t).$$

Question 8. Indiquer, sans justification, laquelle des trois courbes proposées est associée à la fonction s_3.

La courbe proposée associée à la somme partielle est la courbe numéro 3.

✓ **RÉPONSE À RETENIR**

Courbe numéro 3.

Question 9.a. Pour $P = (a_0)^2 + 1/2[(a_1)^2 + (a_2)^2 + (a_3)^2]$, donner une valeur approchée de P à 10^{-4} près.

On remplace les coefficients par leurs valeurs exactes dans $P = a_0^2 + \frac{1}{2}(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2)$. Ainsi, $P = \frac{9\pi^2}{64} + \frac{1}{2}\left(\frac{4}{\pi^2} + \frac{1}{\pi^2} + \frac{4}{81\pi^2}\right)$. L'évaluation numérique, puis l'arrondi au dix-millième, donnent la valeur à inscrire.

✓ **RÉPONSE À RETENIR**

$P \approx 1{,}6437$.

Question 9.b. La valeur efficace F de f vérifie $F^2 = \pi^2/6$ et P constitue une approximation de F^2. Choisir le pourcentage d'erreur parmi 0,1 %, 1 % et 10 %. Une seule réponse est exacte et aucune justification n'est demandée.

Le pourcentage d'erreur est $\frac{|P - F^2|}{F^2} \times 100$. Avec $P \approx 1{,}6437$ et $F^2 = \pi^2/6 \approx 1{,}6449$, l'erreur est d'environ $0{,}074\,\%$. Parmi les trois choix proposés, cette valeur correspond à $0{,}1\,\%$.

✓ **RÉPONSE À RETENIR**

$0{,}1\,\%$.

Ce qu'il faut retenir de ce sujet (Session 2023)

Bilan de l'épreuve : Cette épreuve de mathématiques du BTS, session 2023, code 23MATGRB2, dure deux heures et comporte deux exercices de 10 points. Le coefficient est de 1,5 en conception et industrialisation en microtechniques et de 2 en électrotechnique. Elle étudie la fermeture d'un tiroir par équation différentielle et analyse de fonction, puis une fonction périodique par séries de Fourier, avec calculs, représentation et interprétation.

Notions-clés, formules & règles à maîtriser

- Pour $y'' + 5y' + 4y = 0$, l'équation caractéristique associée est $r^2 + 5r + 4 = 0$.
- Pour $f(t) = (70/3)e^{-t} - (10/3)e^{-4t}$, la limite en $+\infty$ est 0 et l'asymptote horizontale est $y = 0$.
- Une fonction paire a des coefficients sinus de Fourier b_n nuls.
- Pour une fonction périodique de période T, la pulsation fondamentale est $\omega = 2\pi/T$.

Points de vigilance & attentes du jury

- Relier la distance initiale à f(0) et la vitesse signée à f'(0), sans oublier les unités.
- Dans l'algorithme, appliquer le test avant chaque incrémentation de t et continuer jusqu'à ce que la condition soit fausse.
- Respecter les bornes d'intégration et les facteurs des formules de Fourier du formulaire.
- Garder une précision suffisante avant l'arrondi et distinguer l'approximation de F^2 de la valeur efficace F.

Questions fréquentes sur cette épreuve (Q&A Examen)

Q : Comment utiliser les conditions initiales dans l'exercice du tiroir ?

La distance initiale donne directement f(0), en centimètres. La vitesse initiale correspond à f'(0), avec son signe : une vitesse négative signifie que la distance entre M et O diminue pendant la fermeture.

Q : Pourquoi les coefficients b_n sont-ils nuls dans l'exercice sur Fourier ?

La fonction est paire et sin(nt) est impaire. Leur produit est donc impair, et l'intégrale de cette fonction sur un intervalle symétrique est nulle, ce qui donne $b_n = 0$.

Q : Combien de temps dure l'épreuve et comment répartir son temps ?

L'épreuve dure deux heures et les deux exercices valent chacun 10 points. Le sujet ne fixe pas de durée par exercice : répartissez le temps selon la difficulté et gardez quelques minutes pour vérifier les résultats.

Q : Quelles précisions et justifications faut-il respecter dans les réponses ?

Justifiez les démarches lorsque le sujet le demande, respectez les arrondis indiqués et utilisez les unités adaptées. Pour le choix de courbe et la question à choix multiples, le sujet précise qu'aucune justification n'est demandée.

Sujet officiel associé (PDF) : https://btscoiffure.fr/assets/annales/bts-coiffure/E2 - Mathématiques/2023/BTS Coiffure - E2 - Mathématiques - Session 2023 - 2-Sujet.pdf

Ressources BTS Coiffure : Toutes les annales & corrigés • Fiches de révision complètes • Simulateur de notes d'examen

Copyright © 2027 FormaV®. Tous droits réservés.

FormaV® est une marque déposée auprès de l'INPI sous le numéro 5227897.

Ce document a été élaboré par FormaV® avec le plus grand soin afin d'accompagner chaque apprenant vers la réussite de ses examens. Son contenu (textes, graphiques, méthodologies, tableaux, exercices, concepts, mises en forme) constitue une œuvre protégée par le droit d'auteur.

Toute copie, partage, reproduction, diffusion ou mise à disposition, même partielle, gratuite ou payante, est strictement interdite sans accord préalable et écrit de FormaV®, conformément aux articles L.111-1 et suivants du Code de la propriété intellectuelle. Dans une logique anti-plagiat, FormaV® se réserve le droit de vérifier toute utilisation illicite, y compris sur les plateformes en ligne ou sites tiers.

En utilisant ce document, vous vous engagez à respecter ces règles et à préserver l'intégrité du travail fourni. La consultation de ce document est strictement personnelle.

Merci de respecter le travail accompli afin de permettre la création continue de ressources pédagogiques fiables et accessibles.